

LÓGICA

HOJA 3

Semántica de la lógica proposicional

Ejercicio 1 ¿Cuáles de las fórmulas del ejercicio 5 de la HOJA 2 son tautologías? ¿Cuáles son contradicciones?

Para aquellas que sean contingencias, calcula sus modelos y sus contraejemplos.

Ejercicio 2 Prueba que las siguientes fórmulas son tautologías:

$$\begin{aligned}
 &\varphi \vee \neg\varphi, \quad \neg(\varphi \wedge \neg\varphi), \\
 &(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi), \quad (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi), \\
 &\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi, \quad \varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi \\
 &\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \quad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi), \\
 &(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \psi \leftrightarrow \psi, \quad (\varphi \vee \neg\varphi) \vee \psi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\varphi), \\
 &(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee \psi \leftrightarrow \psi, \quad (\varphi \wedge \neg\varphi) \wedge \psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi), \\
 &\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Sea φ una fórmula proposicional. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y justifica tus respuestas.

- Si φ es insatisfacible, $\neg(\varphi)$ es una tautología.
- Si φ es una tautología, $\neg(\varphi)$ es insatisfacible.
- Si φ es una contingencia, $\neg(\varphi)$ es una contingencia.
- Si φ es satisfacible, $\neg(\varphi)$ es satisfacible.
- Si φ es satisfacible, $\neg(\varphi)$ no es una tautología.

Ejercicio 4 Verifica las implicaciones lógicas de la tabla de los apuntes.

Ejercicio 5 ¿Son validas las siguientes deducciones?

$$\begin{array}{l}
 \frac{p \rightarrow \neg r}{q \rightarrow r}, \quad \frac{(q \vee \neg s) \rightarrow r}{\neg q \rightarrow r}, \\
 \frac{\neg(p \wedge q)}{r \rightarrow s}, \quad \frac{p \rightarrow \neg s}{r \rightarrow s}, \\
 \frac{\quad}{p \rightarrow r}
 \end{array}$$

$$\frac{p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)}{(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)}, \quad \frac{(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)}{p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)}, \quad \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \cdot \frac{s \vee p}{r \vee t}$$

Ejercicio 6 *Peláez, Quesada y Rodríguez son tres políticos acusados de corrupción. En el juicio ellos declaran:*

Peláez: “Quesada es culpable y Rodríguez es inocente.”

Quesada: “Peláez es culpable sólo si Rodríguez es también culpable.”

Rodríguez: “Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros es culpable.”

Si todos son inocentes, ¿quién ha mentado?

Si todos dicen la verdad, ¿quién es inocente?

Si los inocentes dicen la verdad y los culpables mienten, ¿quién es inocente?

Ejercicio 7 *Determina si las deducciones de los ejercicios 12 y 13 de la HO-JA 2 son válidas.*

Ejercicio 8 *(La equivalencia de fórmulas es una relación de equivalencia) Demuestra que en el conjunto \mathbf{L} de las fórmulas bien construidas, la relación*

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{si y sólo si} \quad (\varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{es una tautología})$$

es una relación de equivalencia.

Ejercicio 9 *Verifica las equivalencias lógicas de la tabla de los apuntes.*

Ejercicio 10 *Elegir de las afirmaciones siguientes aquella que sea equivalente a “No es cierto que sea suficiente trabajar para ser feliz.”*

1. *No trabajar es suficiente para no ser feliz.*
2. *Para ser feliz es necesario trabajar.*
3. *No es posible trabajar y no ser feliz al mismo tiempo.*
4. *Se puede trabajar y no ser feliz.*

5. *Se trabaja o no se es feliz.*

Ejercicio 11 *Dadas las fórmulas*

$$p \rightarrow q, \quad (q \vee \neg s) \rightarrow r, \quad p \leftrightarrow q, \quad (p \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg r), \quad (r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q),$$

encuentra otras equivalentes en las que se usen sólo los conectivos \neg, \wedge, \vee . Deduce que toda fórmula bien construida es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos \neg, \wedge, \vee .

Ejercicio 12 *Encuentra una fórmula equivalente a $p \vee q$ en la que sólo intervengan los conectivos \wedge, \neg . Deduce que toda fórmula bien construida es equivalente a otra donde intervienen sólo los conectivos \neg, \wedge .*

Ejercicio 13 *En informática, se suelen definir los siguientes conectivos binarios:*

1. *El ó exclusivo, con símbolo \oplus , es la negación de la doble implicación.*
2. *El nor, con símbolo \downarrow , es la negación de la disyunción.*
3. *El nand, con símbolo \uparrow , es la negación de la conjunción.*

Escribe las tablas de los valores de verdad de estos tres conectivos.

Ejercicio 14 *Determina si la dos fórmulas*

$$\varphi_1 : (r \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow s \quad \varphi_2 : r \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee s.$$

son equivalentes y dibuja sus árboles sintácticos.

Ejercicio 15 *Considera el siguiente razonamiento:*

x es positivo sólo si es mayor que 0. x no es positivo si x es negativo. Por tanto, x es positivo y negativo sólo si es igual a cero.

a) *Formaliza el razonamiento anterior en la lógica proposicional.*

b) *Por medio de equivalencia de fórmulas, halla una fórmula proposicional equivalente al razonamiento y tal que contenga sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$.*

Ejercicio 16 *Estudia, mediante tableaux, la validez de los argumentos:*

$$\begin{aligned} \{(p \vee \neg q) \rightarrow r, \quad \neg p \rightarrow t, \quad s \rightarrow \neg q, \quad r \rightarrow q\} & \models s \rightarrow t \\ \{t \rightarrow (s \rightarrow p), \quad p \rightarrow \neg p, \quad (r \rightarrow t) \wedge (q \rightarrow s)\} & \models r \rightarrow \neg q \\ \{s \vee t, \quad q \rightarrow p, \quad t \rightarrow \neg p, \quad \neg s\} & \models \neg q \end{aligned}$$

Ejercicio 17 *Demuestra, utilizando tableaux, que la siguiente fórmula es una contradicción:*

$$\varphi : ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \wedge p.$$

Ejercicio 18 *Clasifica la siguiente fórmula usando el método de los tableaux:*

$$\varphi : ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))).$$

Ejercicio 19 *Formaliza el siguiente razonamiento con el lenguaje de la lógica proposicional y prueba su validez usando el método de los tableaux.*

Si Cristina está en lo cierto, entonces Marcos está equivocado. Si Marcos está equivocado, entonces Pablo también está equivocado. Si Pablo está equivocado, entonces el espectáculo no es esta noche. O el espectáculo es esta noche o Javier no lo verá. Cristina está en lo cierto. Por tanto, Javier no verá el espectáculo.

Ejercicio 20 *Formaliza el siguiente razonamiento y estudia su validez usando tableaux.*

Si el barco entra en el puerto, habrá una gran fiesta. El barco entra en el puerto sólo si necesita repostar combustible. El barco no necesita combustible a menos que venga de muy lejos. Es imposible que no necesite combustible si la comida ya se les ha terminado. Sabemos que, o bien se le ha terminado la comida, o bien necesita combustible. Por tanto: habrá una gran fiesta.

Ejercicio 21 *Usando tableaux, clasifica las fórmulas:*

1. $\neg s \vee \neg p \rightarrow (t \rightarrow (p \vee \neg s))$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $(t \rightarrow (p \wedge s)) \wedge (\neg s \rightarrow p \wedge \neg t)$
4. $(\neg(\neg(\neg p \vee r) \vee q)) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r)$

Ejercicio 22 Con el método de los tableaux, escribe las fórmulas del ejercicio anterior en su formas normal disyuntiva y conjuntiva.

Ejercicio 23 Por medio de un tableau semántico acabado halla la forma normal disyuntiva de la fórmula proposicional $(p \vee r \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow t \wedge s)$.

Ejercicio 24 Consideramos la siguiente fórmula:

$$\varphi : ((r \rightarrow q) \vee (p \vee \neg q)) \rightarrow (r \rightarrow (q \vee p)).$$

- a) Clasifica φ usando el método de los tableaux.
- b) Escribe una FND de φ .
- c) Encuentra, si es posible, una valoración que sea modelo de φ y otra que sea contraejemplo de φ .

Ejercicio 25 Por medio de tableaux semánticos acabados, determina si la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$$(p \wedge q \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p \vee q).$$